

零場邊界積分方程法求解含圓形孔洞之功能梯度材料的SH波散射問題

Shi-En Hong(洪仕恩), Department of Civil Engineering, Tamkang University, Taiwan (607380283@s07.tku.edu.tw)

Advisor: Prof. Jia-Wei Lee (李家璋)

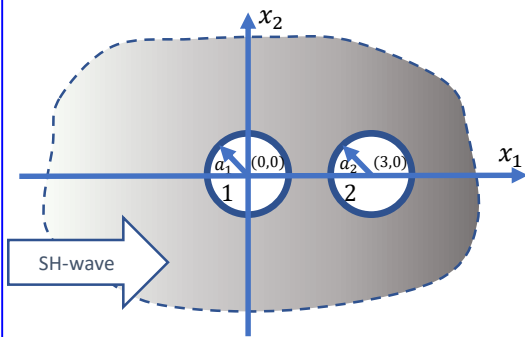
Abstract

本論文使用零場邊界積分方程法求解含有雙顆圓形孔洞的功能梯度材料SH波散射問題。且剪力模數與密度都為指數變化，透過變數變換的方法，將控制方程式轉成一般的二維Helmholtz方程式，且孔洞邊界條件為曳引力為零的情況。搭配極座標系統下的退化核函數並假設邊界密度為傅立葉級數展開，可充分發揮三角函數的正交性，因此每個圓形邊界弧長積分都可解析求得，最後透過配點法的方式滿足邊界條件求得未知係數。數值結果包含全場位移振幅、圓形孔洞邊界上位移振幅與動態應力集中因子，並探討不同波數 k 與非均勻空間變換參數 β 的影響，最後也使用有限元素法(PDE toolbox)做數值結果比對，其結果都一致吻合。

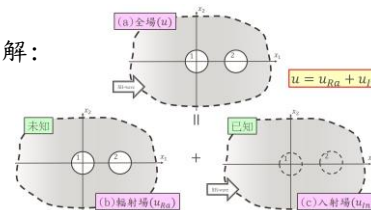
Discussion

觀察全場位移振幅可以發現當 $\beta = 0$ 與 $\beta = 0.2$ 時較大的位移振幅發生在圓孔洞的左邊，但 $\beta = -0.2$ 則發生在右邊。並可以發現第二顆圓孔洞因為被第一顆圓孔洞的遮蔽下位移相對第一顆圓孔洞較小。圓孔洞邊界上的位移振幅，可以發現可以發現在第一顆圓孔洞那點當 β 越大其值越大，0或 2π 那點則是 β 越小值越大。再來看第二顆圓孔洞可以發現不管是在0、 π 或是 2π 都是當 β 越小值越大。從動態應力集中可以發現不管是第一顆或第二顆圓孔洞， β 越大其動態應力集中越大，而且最大值都發生在 $\pi/4 \sim \pi/2$ 之間。並且因為入射角 $\alpha = 0^\circ$ ，只受到 \cos 項的影響，所以圖形都是上下對稱的。

Problem description



問題拆解:



$$\text{控制方程式: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial x} + \omega^2 \frac{\rho(x)}{\mu(x)} u = 0$$

$$\rightarrow \nabla^2 u(x) + \kappa^2 u(x) = 0$$

$$\text{邊界條件: } \tau(x) = \mu(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0 \quad \begin{matrix} \text{剪力模數 } \mu: \mu_0 e^{2\beta x} \\ \text{材料密度 } \rho: \rho_0 e^{2\beta x} \end{matrix}$$

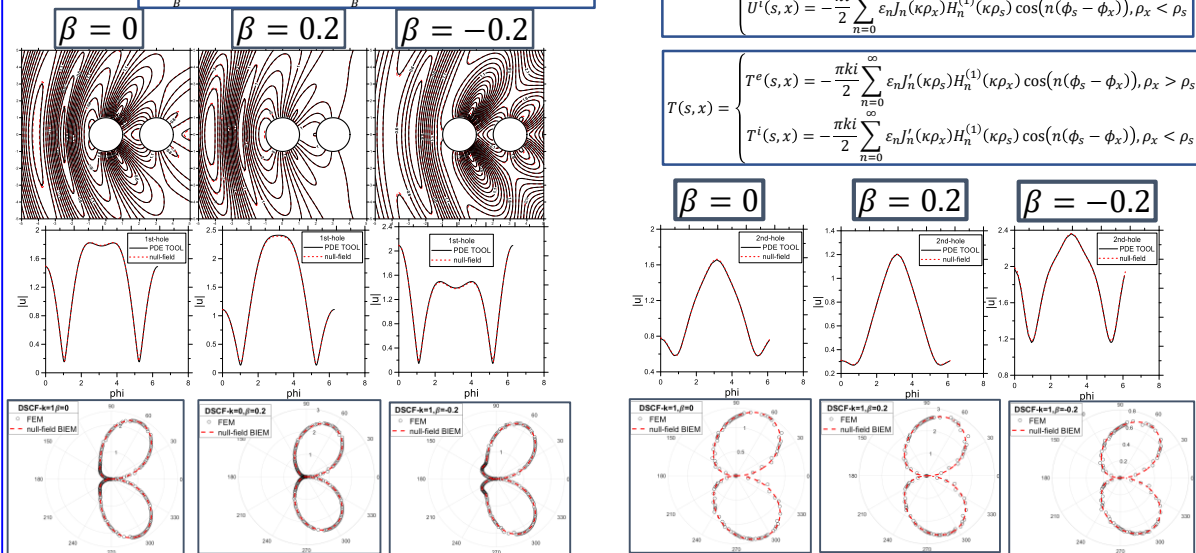
Results

$$2\pi w_{Ra}(x) = \int_{\Gamma} T^e(s, x) w_{Ra}(s) dB(s) - \int_{\Gamma} U^e(s, x) t_{Ra}(s) dB(s), x \in D \cup B$$

$$0 = \int_{\Gamma} T^i(s, x) w_{Ra}(s) dB(s) - \int_{\Gamma} U^i(s, x) t_{Ra}(s) dB(s), x \in D^c \cup B$$

$$U(s, x) = \begin{cases} U^e(s, x) = -\frac{\pi i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(\kappa \rho_s) H_n^{(1)}(\kappa \rho_x) \cos(n(\phi_s - \phi_x)), \rho_x \geq \rho_s \\ U^i(s, x) = -\frac{\pi i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(\kappa \rho_x) H_n^{(1)}(\kappa \rho_s) \cos(n(\phi_s - \phi_x)), \rho_x < \rho_s \end{cases}$$

$$T(s, x) = \begin{cases} T^e(s, x) = -\frac{\pi k i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n'(\kappa \rho_s) H_n^{(1)}(\kappa \rho_x) \cos(n(\phi_s - \phi_x)), \rho_x > \rho_s \\ T^i(s, x) = -\frac{\pi k i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n'(\kappa \rho_x) H_n^{(1)}(\kappa \rho_s) \cos(n(\phi_s - \phi_x)), \rho_x < \rho_s \end{cases}$$



Conclusions

1. 成功將無限域中含單顆圓孔洞問題延伸至雙圓孔洞。
2. 本法數值結果與有限元素法(PDE toolbox)比對一致吻合。
3. 電腦計算成本小，總共只用了41個點(單一孔洞)，即可求出準確解。
4. 在第一顆圓孔洞邊界上的位移振幅無論 β 變大或變小其位移振幅都變大；在第二顆圓孔洞邊界上的位移振幅隨著 β 變小而變大。
5. 動態應力集中因子的值與 β 值成正比。

References

[1] Trifunac M. D. "Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon" Earthquake Engineering and Structural Dynamic, 1, 267-281, (1973)

[2] Fang X. Q., Hu C. and Du S.Y. "Strain energy density of a circular cavity buried in semi-infinite functionally graded materials subjected to shear waves" Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 46, 166-174, (2006)

[3] Martin P. A. "Scattering by a Cavity in an Exponentially Graded Half-Space" Journal of Applied Mechanics 76, / 031009-3, (2009)

[4] Martin P. A. "Scattering by defects in an exponentially graded layer and misuse of the method of images" International Journal of Solids and Structures 48, 2164-2166, (2011)

[5] Shih, Y. T., SH-wave scattering by circular hole in a functionally graded material using the null-field boundary integral equation method, Thesis supervised by Prof. Jia-Wei Lee Department of Civil Engineering, Tamkang University, New Taipei City, Taiwan (2019)