

零場邊界積分方程法求解含圓形孔洞功能梯度介質的反平面問題

Wei-Chen Tang (湯樟丞), *Department of Civil Engineering, Tamkang University, Taiwan* (607380135@s07.tku.edu.tw)
 Advisor: Prof. Jia-Wei Lee (李家璋)

Abstract

本論文使用零場邊界積分方程法 (null-field BIEM) 求解含圓形孔洞之功能梯度材料介質的反平面問題, 本文所採用的功能梯度材料剪力模數呈指數變化, 且在無窮遠處受一對剪應力 (Remote shear), 透過變數變換, 位移場的控制方程式為典型的 Modified Helmholtz 方程式。因此即可利用零場邊界積分方程法進行求解, 搭配退化核函數, 傅立葉級數展開基本解與邊界密度, 由於誤差來源只有擷取項數的多寡, 因此可得到半解析解。最後也使用有限元素法 (PDE Toolbox) 做其數值結果比對, 其結果都一致吻合, 除位移場的比較之外, 也對圓形孔洞邊界上的應力集中因子 (stress concentration factor) 做比較, 針對不同非均勻空間變換參數 (non-homogeneous parameter) 對其場量的影響。

Discussion

在 Beta=0 時也就是均質的情況, 而 Beta=0.2 為功能梯度材料沿 x 方向進行變化。

Remote shear 在 x 方向時, 隨著 Beta 變大, 在 180 度時位移會越來越大。
 Remote shear 在 y 方向時, 隨著 Beta 變大, 在 90 度及 270 度時位移會越來越大。

而我們的應力集中因子隨 β 的變化, 越來越小, 在 180 度時, 應力集中因子隨 β 的變化, 則是越來越大。且在有 Beta 時, 為一在左半部會變得相對密集,

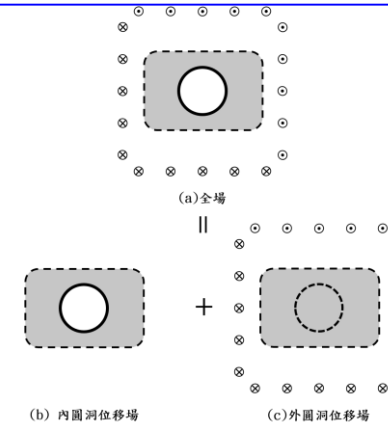
Problem description

控制方程式 $\Rightarrow \nabla^2 w - \beta^2 w = 0, u = e^{-\beta x} w$
 材料剪力模數的空間變化參數 $\Rightarrow \mu(x) = \mu_0 e^{2\beta x}$

邊界條件 $\Rightarrow t(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0$

閉合型基本解 $\Rightarrow U(x, s) = -K_0^{(1)}(\beta r)$

$$\text{展開} \Rightarrow U(x, s) = \begin{cases} U^i = -1 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(\beta \rho) K_n^{(1)}(\beta R) \cos(n(\theta - \phi)), \rho < R \\ U^e = -1 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n K_n^{(1)}(\beta \rho) I_n(\beta R) \cos(n(\theta - \phi)), \rho \geq R \end{cases}$$



Results

	Remote shear at x $\tau_{xz}^{\infty} = 1, \tau_{yz}^{\infty} = 0$ Beta=0	Remote shear at x $\tau_{xz}^{\infty} = 1, \tau_{yz}^{\infty} = 0$ Beta=0.2	Remote shear at y $\tau_{xz}^{\infty} = 0, \tau_{yz}^{\infty} = 1$ Beta=0	Remote shear at y $\tau_{xz}^{\infty} = 0, \tau_{yz}^{\infty} = 1$ Beta=0.2
位移等高線				
邊界位移				
SCF				

Conclusions

- 在無限域單圓問題中, 考慮 Traction Free 邊界條件, 在使用邊界積分方程來推導, 以及使用有限元素法 (FEM) 來驗證, 在最後的結果兩者相互吻合。
- 在邊界積分方程法, 我們只取 41 個點就能得到較為準確的解, 而在有限元素法, 我們則需取到 117 萬個節點數, 甚至元素數量多達 235 萬之多才能得到較為準確的解, 程式運算量相差許多。

References

- Chen J.T., Shen W.C., Wu A.C., "Null-field Integral Equations for Stress Field around Circular Holes under Antiplane Shear" *Engineering Analysis with Boundary Elements* 30, 205-217, (2006)
- Wang X., Pan E., "A Functionally Graded Plane With a Circular Inclusion Under Uniform Antiplane Eigenstrain" *Journal of Applied Mechanics* 75, 014501, (2008)
- Lubarda V.A., "On the circumferential shear stress around circular and elliptical holes" *Archive of Applied Mechanics* 85, 223-235, (2015)